Όνομα: Γιώργος Καφεντζής Ημερ. Παράδ: 4-12-02

Α.Μ: 1367

ΗΥ-215 - 6η Σειρά Ασκήσεων

1. Ορίζοντας τη συνάρτηση Dirac ως όριο συνάρτησης

$$\delta(t) = \lim_{A\to 0} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t},$$

αποδείξτε ότι ο Μ.Φ της $\delta(t)$ είναι 1.

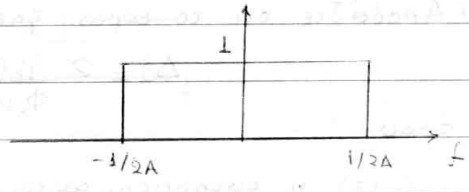
Ο Μ.Φ. της $\delta(t)$ είναι $F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{A\to 0} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t/A}\, \frac{1}{A}\, e^{-j2\pi f t}\, dt.$$

Όμως το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{A} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{A}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\frac{1}{A}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{A}\right)$. Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος αυτού είναι $X(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right) = \operatorname{rect}(fA)$.

Άρα θέλαμε το $\lim_{A\to 0} \operatorname{rect}(fA)$:



Από τον ορισμό της συνάρτησης $rect(Af)$ έχουμε ότι:

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & -T/2 \le t \le T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \Longrightarrow rect\left(\frac{f}{1/A}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2A} \le f \le \frac{1}{2A} \\ 0, & |f| > \frac{1}{2A} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι όσο το A πλησιάζει το 0 (μηδέν), τόσο μεγαλύτερο γίνεται το "πεδίο" στο οποίο η συνάρτηση $rect\left(\frac{f}{1/A}\right)$ είναι ίση με 1, γιατί $\lim_{A\to 0}\left(-\frac{1}{2A}\right) = -\infty$, $\lim_{A\to 0}\left(\frac{1}{2A}\right) = +\infty$ και γίνεται $rect\left(\frac{f}{1/A}\right) = 1$, με $-\infty \le f \le +\infty$. Δηλ. συνοψίζοντας, καταλήγουμε στο ότι $\lim_{A\to 0}\left(rect\left(\frac{f}{1/A}\right)\right) = 1$

Άρα, τελικά, ο μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ είναι 1.

3. Το ορθογώνιο σήμα, $x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$, το έχουμε αναφέρει συχνά και ως σήμα παραθύρου. Μια οικογένεια παραθύρων δίνεται από την εξίσωση

$$u_\alpha(t) = \left[\alpha + (1-\alpha)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right] rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

όπου α είναι μια σταθερά.

Αν $\alpha = 1$, έχουμε το γνωστό ορθογώνιο παράθυρο.

$\alpha = 0,54$, έχουμε το παράθυρο Hamming.

$\alpha = 0,5$, έχουμε το παράθυρο Hanning.

(α') Σχεδιάστε κάθε παράθυρο στο χρόνο.

(β') Δείξτε ότι η ενέργεια κάθε παράθυρου δίνεται από τη σχέση:

$$\left[\alpha^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2\right]T.$$

(γ') Αποδείξτε ότι το εύρος φάσματος το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\Delta f = 2\,\frac{\varphi_x(0)}{\Phi_x(0)}$$

όπου

$\varphi_x(\tau)$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$\Phi_x(f)$ η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της ενέργειας.

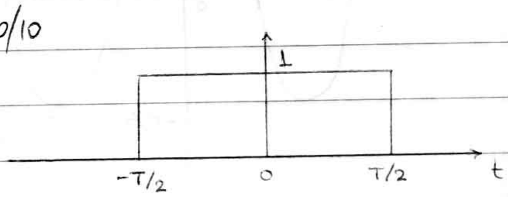
είναι για κάθε παράθυρο

2/T για ορθογώνιο παράθυρο

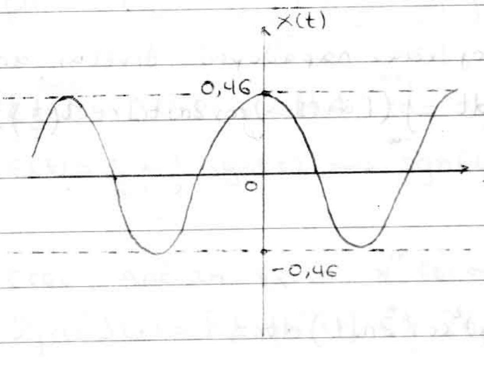
2,725/T για το παράθυρο Hamming

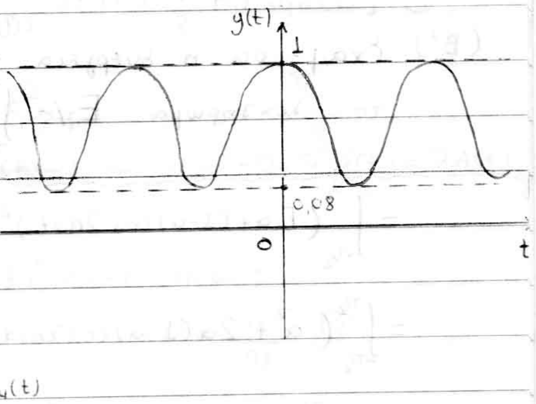
3/T για το παράθυρο Hanning

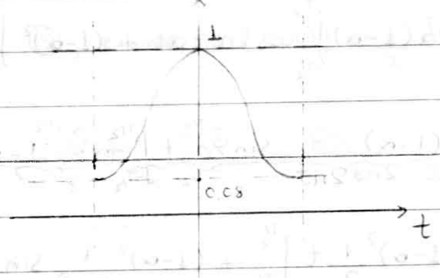
(α') Για $\alpha = 1$, $u_1(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$ 10/10



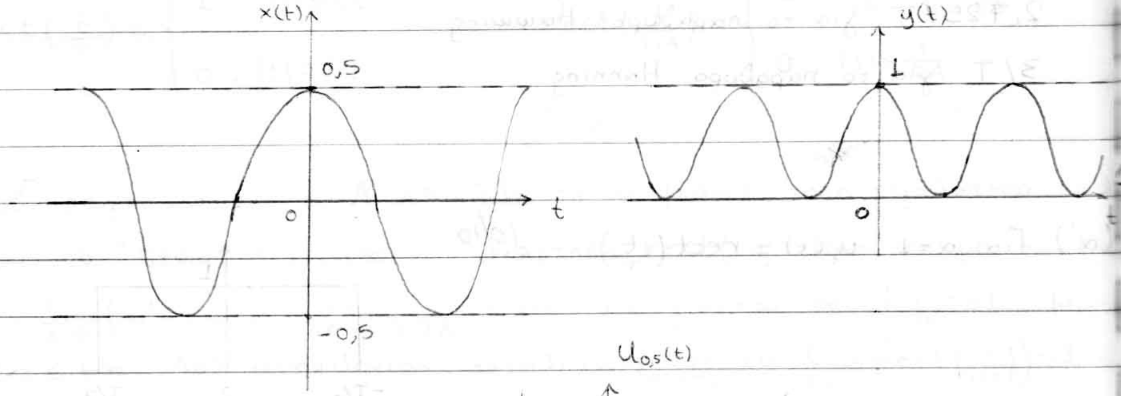
Για $\alpha = 0,54$, $u_{0,54}(t) = [\underbrace{0,54 + \overbrace{0,46\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}^{x(t)}}_{y(t)}]\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$

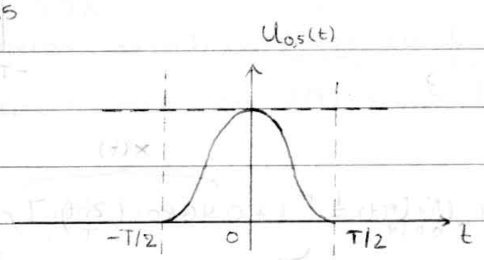






$$\text{Για}\quad \alpha=0{,}5,\quad u_{0,5}(t)=\Big[\overbrace{0{,}5+\underbrace{0{,}5\cos\left(2\pi\tfrac{t}{T}\right)}_{y(t)}}^{x(t)}\Big]\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{t}{T}\right)$$





(B΄) Έχουμε ότι η ενέργεια της οικογένειας παλμών δίνεται από το ολοκλήρωμα $W=\int_{-\infty}^{+\infty}u_\alpha^2(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left[\alpha+(1-\alpha)\cos 2\pi f t\right]\mathrm{rect}\left(\tfrac{t}{T}\right)\right)^2dt$

$$=\int_{-T/2}^{T/2}\left(\left[\alpha+(1-\alpha)\cos 2\pi f t\right)^2 dt=$$

$$=\int_{-T/2}^{T/2}\left(\alpha^2+2\alpha(1-\alpha)\cos 2\pi f t+(1-\alpha)^2\cos^2 2\pi f t\right)dt=$$

$$=\alpha^2\int_{-T/2}^{T/2}dt+2\alpha(1-\alpha)\int_{-T/2}^{T/2}\cos 2\pi f t\,dt+(1-\alpha)^2\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2 2\pi f t\,dt=$$

$$=\alpha^2 t\Big]_{-T/2}^{T/2}+2\alpha(1-\alpha)\frac{1}{2\pi f}\sin 2\pi f t\Big]_{-T/2}^{T/2}+(1-\alpha)^2\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}dt+(1-\alpha)^2\int_{-T/2}^{T/2}\cos 4\pi f t\,dt=$$

$$=\alpha^2T+0+(1-\alpha)^2\frac{1}{2}t\Big]_{-T/2}^{T/2}+(1-\alpha)^2\frac{1}{4\pi f}\sin 4\pi f t\Big]_{-T/2}^{T/2}=$$

$$=\alpha^2T+\frac{1}{2}(1-\alpha)^2T+0=$$

$= \alpha^2 T + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 T =$

$= [\alpha^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2] T$

4. Να υπολογιστεί ο Μ.Φ. της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 \;, & t<0 \\ 1 \;, & t>0 \end{cases}$$

Η βηματική μοναδιαία συνάρτηση γράφεται ως:

$\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$, όπου $\mathrm{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$, $t \neq 0$. ✓

Είναι $F\{\epsilon(t)\} = F\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}F\{\mathrm{sgn}(t)\}$ ①

Έστω $S(f)$ ο Μ.Φ. του $\mathrm{sgn}(t)$. Έχουμε από τη σχέση

$\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \Longrightarrow \mathrm{sgn}(t) = 2\epsilon(t) - 1 \Rightarrow \mathrm{sgn}'(t) = 2\epsilon'(t) = 2\delta(t$

Έτσι, από τη σχέση $x^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$, είναι:

$2j\pi f\, S(f) = F\{\mathrm{sgn}'(t)\} \overset{*}{\Rightarrow} 2\pi j f\, S(f) = 2 \Rightarrow S(f) = \frac{1}{j\pi f}$ ②

Άρα από ①, λόγω ②, είναι: $F\{\epsilon(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2j\pi f}$. ✓

* γιατί $F\{\mathrm{sgn}'(t)\} = 2F\{\delta(t)\} = 2 \cdot 1 = 2$

2. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Parseval αποδείξτε ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha t)}{t^2}\, dt = \alpha\pi.$$

Γνωρίζουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (X(f))^2 df = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (X(\omega))^2 d\omega$. ①

Άρα θα πρέπει να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(t) = \frac{\sin^2(\alpha t)}{t^2}$.

Έχουμε: $x(t) = \frac{\sin^2(\alpha t)}{t^2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha t}{\pi}\right)}{\frac{\pi\alpha t}{\pi}} \frac{\alpha}{\pi}\, \pi = \mathrm{sinc}\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)\frac{\alpha}{\pi}\cdot\pi.$

Γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του παραπάνω σήματος, που είναι $X(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{\alpha/\pi}\right)\pi = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega/2\pi}{\alpha/\pi}\right)\pi = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)\pi =$

$= \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right) \Longleftrightarrow X(f) = \pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right).$

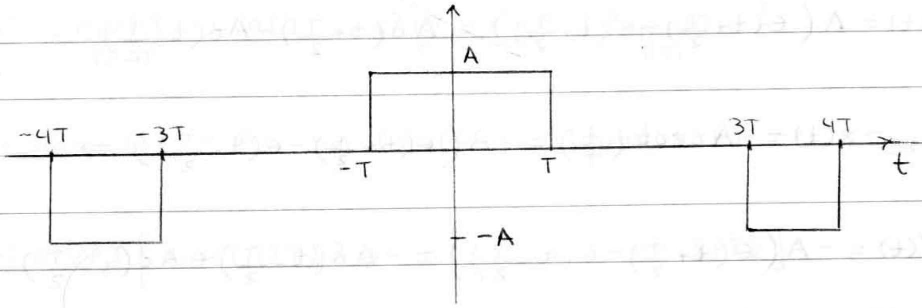
Άρα, από τη σχέση ①, έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha t)}{t^2}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)\right)^2 d\omega$

$= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-2\alpha/2}^{2\alpha/2}\left(\overset{1}{\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)}\right)^2 d\omega =$

$= \frac{\pi}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} d\omega = \frac{\pi}{2}(\alpha+\alpha) = \frac{\pi}{2}\cdot 2\alpha = \alpha\pi$

Άρα τελικά $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\alpha t)}{t^2}dt = \alpha\pi.$

5. Να υπολογιστεί ο Μ.Φ. του σήματος χρησιμοποιώντας



- παραγώγιση
- πρόσθεση σημάτων. Προσπαθήστε να βρείτε τρία ορθογώνια σήματα με συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων που όταν προστεθούν θα δώσουν το αρχικό σήμα. Σε μια τέτοια περίπτωση είναι πολύ απλό να υπολογίσετε τον Μ.Φ. του σήματος αν γνωρίζετε τον Μ.Φ. του ορθογωνίου σήματος.

- Παρατηρούμε ότι τρία ορθογώνια σήματα που είναι συμμετρικά είναι τα $x_1(t) = A\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$, $x_2(t) = -A\text{rect}\left(\frac{t}{8T}\right)$, $x_3(t) = +A\text{rect}\left(\frac{t}{6T}\right)$, και αν αυτά προστεθούν, τότε έχουμε το αρχικό σήμα. Δηλαδή:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \Rightarrow F\{x(t)\} = F\{x_1(t)\} + F\{x_2(t)\} + F\{x_3(t)\} =$$
$$= F\{A\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\} + F\{-A\text{rect}\left(\frac{t}{8T}\right)\} + F\{+A\text{rect}\left(\frac{t}{6T}\right)\} =$$
$$= AF\{\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\} - AF\{\text{rect}\left(\frac{t}{8T}\right)\} + AF\{\text{rect}\left(\frac{t}{6T}\right)\} =$$
$$= A2T\,\text{sinc}(2fT) - A8T\,\text{sinc}(8fT) + A6T\,\text{sinc}(6fT) =$$
$$= 2AT\left[\text{sinc}(2fT) + 3\,\text{sinc}(6fT) - 4\,\text{sinc}(8fT)\right].$$

• Γνωρίζουμε ότι $x(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) = A\left(\epsilon\left(t+\frac{T}{2}\right) - \epsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x'(t) = A\left(\epsilon'\left(t+\frac{T}{2}\right) - \epsilon'\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) = A\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) - A\delta\left(t-\frac{T}{2}\right).$$

Ακόμα, $-x(t) = -A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) = -A\left(\epsilon\left(t+\frac{T}{2}\right) - \epsilon\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) \Longrightarrow$

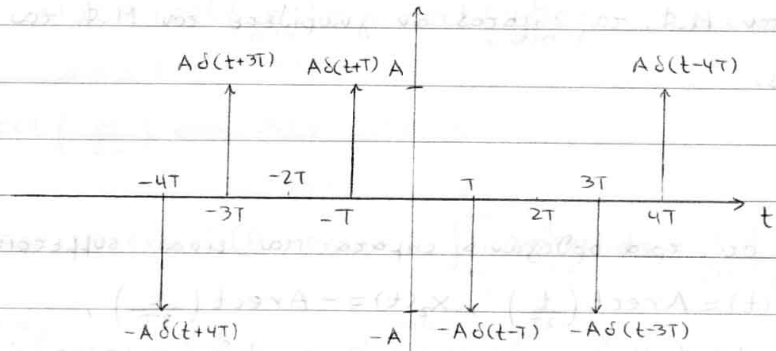
$$\Longrightarrow -x'(t) = -A\left(\epsilon'\left(t+\frac{T}{2}\right) - \epsilon'\left(t-\frac{T}{2}\right)\right) = -A\delta\left(t-\frac{T}{2}\right) + A\delta\left(t-\frac{T}{2}\right).$$

Το σήμα του σχήματος γράφεται ως:

$$x(t) = -A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) + A\,rect\left(\frac{t}{2T}\right) - A\,rect\left(\frac{t}{T}\right). \quad -5$$

$$= -A\,rect\left(\frac{t+7T/2}{T}\right) + A\,rect\left(\frac{t}{2T}\right) - A\,rect\left(\frac{t-\frac{7T}{2}}{T}\right)$$

Η παραγώγιση του παραπάνω μας δίνει:



Άρα έχουμε:

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j2\pi f X(f) = F\{-A\delta(t+4T) + A\delta(t+3T) + A\delta(t+T) - A\delta(t-T) - A\delta(t-3T)$$

$$+ A\delta(t-4T)\} =$$

$$= -Ae^{j2\pi f4T} + Ae^{j2\pi f3T} + Ae^{j2\pi fT} - Ae^{-j2\pi fT} - Ae^{-j2\pi f3T} + Ae^{-j2\pi f4T} =$$

$$= -A\cdot 2j\sin 8\pi fT + A2j\sin 6\pi fT + A2j\sin 2\pi fT \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(f) = \frac{-A2j\sin 8\pi fT}{j2\pi f} + \frac{A2j\sin 6\pi fT}{j2\pi f} + \frac{A2j\sin 2\pi fT}{j2\pi f} =$$

$$= \frac{\sin 8\pi fT}{\pi f}(-A) + A\frac{\sin 6\pi fT}{\pi f} + A\frac{\sin 2\pi fT}{\pi f} =$$

$$= -A8T\frac{\sin 8\pi fT}{8\pi fT} + A6T\frac{\sin 6\pi fT}{6\pi fT} + A2T\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} =$$

$$= -8AT\,\mathrm{sinc}(f8T) + A6T\,\mathrm{sinc}(f6T) + 2AT\,\mathrm{sinc}(f2T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(f) = 2AT\left[\mathrm{sinc}(2fT) + 3\,\mathrm{sinc}(6fT) - 4\,\mathrm{sinc}(8fT)\right].$$

20/20

β(γ) Έχουμε $\Delta f = 2\dfrac{q_x(0)}{\Phi_x(0)}$, με $q_x(0) = \dfrac{2(\alpha^2+(1-\alpha)^2)T}{\Phi_x(0)}$, με $\Phi_x(0) = |X(0)|^2$.

Είναι $X(f) = \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}\left(\alpha + (1-\alpha)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)e^{-j2\pi\frac{t}{T}}dt =$

$$= \int_{-T/2}^{T/2}\alpha e^{-j2\pi\frac{t}{T}}dt + \int_{-T/2}^{T/2}(1-\alpha)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi\frac{t}{T}}dt =$$

$$= F\left\{\alpha\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} + \int_{-T/2}^{T/2}(1-\alpha)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi\frac{t}{T}}dt =$$

$$= \alpha T\,\mathrm{sinc}(fT) + \int_{-T/2}^{T/2}(1-\alpha)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi\frac{t}{T}}dt \quad (1)$$

Το σήμα $x(t) = (1-\alpha)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ είναι άρτιο σήμα.

Άρα $F\{x(t)\} = \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}(1-\alpha)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)dt = 0$.

Άρα $\Phi_x(f) = \alpha^2T^2\,\mathrm{sinc}(Tf) \Rightarrow \Phi_x(0) = \alpha^2T^2$.

Άρα: i) $\Delta f_1 = 2\dfrac{T}{T^2} = \dfrac{2}{T}$ ii) $\Delta f_2 = \dfrac{2{,}725}{T}$

iii) $\Delta f_3 = 2\dfrac{[(0{,}5)^2+(0{,}5)^2]T}{(0{,}5)^2T^2} = \dfrac{3}{T}$.